Chapitre 22 : Matrices et applications linéaires

Application linéaire canoniquement associé à une matrice

Exercice 1: Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à B.

1. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 2: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Soit $f_\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire canoniquement associée à R_θ.

1. On dit que f_θ est la rotation vectorielle du plan d'angle θ. Pourquoi ?
2. Soient θ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Calculer et simplifier le produit $R_\theta R_\varphi$.
   En déduire une expression simple de $f_\theta \circ f_\varphi$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ est inversible, et calculer son inverse.
   En déduire que f_θ est un automorphisme et déterminer sa bijection réciproque.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(R_\theta)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   En déduire une expression de $(f_\theta)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3: Soit $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à F.

1. Montrer que f est un endomorphisme particulier et déterminer ses espaces vectoriels caractéristiques.
2. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Rang

Exercice 4: Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Systèmes linéaires

Exercice 5: Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues réelles x,y,z suivant:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}$$

Changements de bases

Exercice 6: Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{B}' = ((1,2),(1,3))$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et écrire les matrices de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
2. Déterminer les coordonnées de $v = (1,4)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Écrire la matrice de l'endomorphisme $f : (x,y) \longmapsto (2x+y, x-y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathscr{B}$, puis dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 7: Soit u l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (0,0,1)$, $e'_3 = (1,1,1)$, $f'_1 = (0,1)$ et $f'_2 = (1,-1)$.
Vérifier que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2)$ sont des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$.

Exercice 8: On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $(X-1)^3$ dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P) = P'$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 9: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10: Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à C.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(C)$. En déduire le rang de f et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(C)$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, puis déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition.
4. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 11: Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,-2,3)\right)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
   Dans la suite, on note p la projection sur F parallèlement à G, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
2. On cherche à calculer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A cette matrice.
   (a) *Première méthode :* Calculer $p(v)$ pour v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. En déduire l'expression de A.
   (b) *Seconde méthode :* Trouver une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $F \oplus G$. Déterminer la matrice de p dans cette base, puis dans la base canonique à l'aide d'une formule de changement de base.
3. Calculer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f : P \mapsto P(0)(1 - X^2) + P'(0)(X + X^2) + P(-1)(-X^2 - 2X + 2)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
2. Soit $P_1 = 1 - X - X^2$, $P_2 = -1 + X + 2X^2$ et $P_3 = 1 - X^2$.
   Montrer que $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
4. En déduire une expression de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)$ en utilisant un changement de base.

Matrice inversible et automorphisme

Exercice 13: *Inverse de la matrice du triangle de Pascal.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Considérons la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.
Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
On pourra s'aider de la matrice de l'automorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique.

Matrices semblables

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application trace est la forme linéaire suivante :

$$\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \end{array}$$

La trace d'une matrice est donc la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Calculer $\mathrm{tr}(I_n)$.
2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   En déduire que si A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.